6.3 Bemerkung zur zweifaktoriellen Varianzanalyse

Der zweifaktoriellen Varianzanalyse liegt das folgende lineare Modell zu Grunde:

$$Y_{ijm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ijm} \quad \text{mit } 1 \leq m \leq n_{ij}$$

α_i erfasst den Einfluss der i-ten Kategorie (i = 1,..., a) des ersten Faktors und β_j erfasst den Einfluss der j-ten Kategorie (j = 1,..., b) des zweiten Faktors. Die Annahmen sind die gleichen, wie bei der einfaktoriellen Varianzanalyse. Wir haben das Modell gleich allgemein für unbalancierte Daten definiert (die Stichprobenumfänge der Subpopulationen können unterschiedlich groß sein). Im zweifaktoriellen Fall lauten die Reparametrisierungsbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha_i = \alpha_a \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{b-1} \beta_j = \beta_b$$

Fasst μ und die Komponenten α_i und β_j zu dem Vektor $\vec{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{a-1}, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{b-1})^T$ zusammen, und definiert man die Designmatrix X über die Reparametrisierungsbedingung, so enthält die erste Spalte nur Einsen und die nächsten a-1 Spalten werden analog dem einfaktoriellen Modell kodiert, als dort bei der Definition der Designmatrix die Reparametrisierungsbedingungen verwendet wurden (siehe (3) in Kapitel 6.2). Dann folgen b-1 Spalten für die Kodierung der Kategorien des zweiten Faktors, ebenfalls analog zum einfaktoriellen Modell (als dort die Reparametrisierungsbedingungen verwendet wurden). Dabei verwenden wir wieder den Trick, dass sich (wie oben zu sehen) jeweils die Parameter für die letzte Kategorie durch die der anderen ausdrücken lassen.

Berücksichtigt man Wechselwirkungsterme $\alpha\beta_{ij}$, so lautet die Modellgleichung wie folgt:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + E_{ijk} \ ,$$

$$\text{mit } 1, 2, \ \ldots, n_{ij} \ , i = 1, 2, \ \ldots, a \text{ und } j = 1, 2, \ldots, b.$$

Ein Modell mit Wechselwirkungen nennt man auch saturiertes Modell. Für die Wechselwirkungsterme lauten die Reparametrisierungsbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = 0 \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha\beta_{ij} = \alpha\beta_{aj} \quad , \text{für } j = 1, 2, .., b \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = 0 \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{b-1} \alpha\beta_{ij} = \alpha\beta_{ib} \quad , \text{für } i = 1, 2, .., a \ .$$

Bemerkung:
Unter http://statistikpaket.de/ANOVA-2-way/ kann eine zweifaktorielle Varianzanalyse durchgeführt werden.