

1.4 Der Binomialtest

Mit dem Binomialtest kann eine Hypothese bezüglich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Kategorie einer dichotomen (es kommen nur zwei Ausprägungen vor, z.B. 0 und 1) Zufallsvariablen anhand einer Stichprobe getestet werden. Dabei besteht die Stichprobe demnach aus Beobachtungen mit zwei Ausprägungen, die als Realisierungen von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen (mit dem Parameter p , mit $0 < p < 1$) angesehen werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der ersten Ausprägung ist gleich p , während folglich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der zweiten Ausprägung gleich $1 - p$ ist. Zählt man nun aus, wie häufig eine Ausprägung vorkommt, so erhält man eine Realisierung k einer binomialverteilten Zufallsvariablen. Dieser Test ist daher eigentlich ein parametrisches Verfahren, da wir einen Test bezüglich des Parameters p der Bernoulli-Verteilung durchführen.

Die Hypothesen:

Zweiseitig	Einseitig	
$H_0: p = p_0$ gegen $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p \geq p_0$ gegen $H_1: p < p_0$	$H_0: p \leq p_0$ gegen $H_1: p > p_0$

Bevor wir in einem Beispiel mit Statistikpaket.de den Test durchführen, zeigen wir, wie man beispielsweise mit Tabellen für die Binomialverteilung den Test durchführen könnte, wie es u.a. in der Oberstufe getan wird. Wir gehen hier noch mal speziell genauer auf die Berechnung des p-Wertes ein, wie wir es beim t-Test getan hatten, da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, die zudem im Allgemeinen nicht (d.h. nicht für alle p) symmetrisch ist.

Test 1 (einseitig bzw. linksseitig):

$$H_0: p \geq p_0$$

gegen

$$H_1: p < p_0$$

H_0 wird verworfen, wenn k „zu klein“ ist, womit der kritische Bereich auf der linken Seite liegt. Bei gegebenem Signifikanzniveau (= Fehler 1. Art) α muss in der Tabelle mit den entsprechenden n und $p = p_0$ das größte k_0 abgelesen werden, für welches

$$P(X \leq k_0) \leq \alpha$$

gilt. Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist dann

$$K = \{0, 1, \dots, k_0\}.$$

Für ein System wie Statistikpaket.de muss kein Wert aus einer Tabelle gesucht werden. Hier wird dann wieder ein p-Wert ausgegeben. Es gilt:

$$\text{p-Wert} = P(X \leq k).$$

Ist dieser kleiner oder gleich α , so kann die Nullhypothese verworfen werden. Zusätzlich wird beim Binomialtest auch der kritische Bereich mit ausgegeben.

Beispiel 1: Bei einem Glücksspiel wird behauptet, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% gewinnt. Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit geringer ist.

Also formuliert man die Hypothesen:

$$H_0: p \geq 0,2$$

gegen

$$H_1: p < 0,2$$

Das Spiel wird 100-mal gespielt, wobei man nur 14-mal gewinnt. Kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% nachweisen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit geringer als 20% ist?

$$P(X \leq k_0) \leq 0,05$$

Tabelle:

$n = 100; p = 0,2$

k	$P(X \leq k)$
12	0,0253
13	0,0469
14	0,0804
15	0,1285
16	0,1923

Also ist $k_0 = 13$ und der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist

$$K = \{0, 1, \dots, 13\}.$$

Da 14-mal gewonnen wurde und 14 nicht im kritischen Bereich liegt, kann H_0 nicht verworfen werden. Hat man zusätzlich die Vermutung, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit nur 10% beträgt, dann könnte man auch den Fehler 2. Art, also β , berechnen. Unter der www-Adresse Statistikpaket.de/Verteilungen/Binomialverteilung.html können die Wahrscheinlichkeiten der obigen Tabelle berechnet werden.

Hier kann man im obigen Beispiel einen Alternativtest formulieren:

$H_0: p = 0,2$

gegen

$H_1: p = 0,1$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\text{„}H_0 \text{ wird nicht verworfen“} \mid H_0 \text{ ist falsch}) = P(X > 13 \mid p = 0,1) \\ &= 1 - P(X \leq 13 \mid p = 0,1) \end{aligned}$$

Nun kann die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 13)$ aus der Tabelle der Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0,1$ abgelesen oder über die oben beschriebene Adresse berechnet werden.

Damit ergibt sich $\beta = 1 - 0,8761 = 0,1239 = 12,39\%$.

Test 2 (einseitig bzw. rechtsseitig):

$H_0: p \leq p_0$

gegen

$H_1: p > p_0$

H_0 wird verworfen, wenn k „zu groß“ ist, womit der kritische Bereich auf der rechten Seite liegt. Bei gegebenem Signifikanzniveau (= Fehler 1. Art) α muss in der Tabelle mit den entsprechenden n und $p = p_0$ das kleinste k_u abgelesen werden, für welches

$$P(X \geq k_u) \leq \alpha$$

gilt, bzw.

$$P(X \geq k_u) = 1 - P(X \leq k_u - 1) \leq \alpha \text{ oder } 1 - \alpha \leq P(X \leq k_u - 1).$$

Dabei ist zu beachten, dass aus der Tabelle $k_u - 1$ abgelesen wird. Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist dann

$$K = \{k_u, \dots, n\}.$$

H_0 kann auch verworfen werden, wenn der

$$\text{p-Wert} = 1 - P(X \leq k - 1) \leq \alpha.$$

Beispiel 2: Bei einem Medikament wird behauptet, dass eine bestimmte Nebenwirkung mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% auftritt. Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit größer ist, denn

bei 50 Patienten, die das Medikament erhielten, hatten 10 diese Nebenwirkung. Also formuliert man die Hypothesen:

$$H_0: p \leq 0,1$$

gegen

$$H_1: p > 0,1$$

Kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Nebenwirkung höher 10% ist?

$$P(X \geq k_u) \leq 0,05 \text{ bzw. } 1 - 0,05 = 0,95 \leq P(X \leq k_u - 1)$$

Wähle das kleinste k_u aus der Tabelle, für welches diese Bedingung gilt.

Tabelle:

$$n = 50; p = 0,1$$

K	$P(X \leq k)$
8	0,9421
9	0,9755
10	0,9906
11	0,9968
12	0,9990

Somit ist $k_u - 1 = 9$ bzw. $k_u = 10$.

Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist

$$K = \{10, 11, \dots, 50\}.$$

Da diese Nebenwirkung 10-mal auftrat und 10 im kritischen Bereich liegt, kann H_0 verworfen werden.

Test 3 (zweiseitig):

$H_0: p = p_0$

gegen

$H_1: p \neq p_0$

H_0 wird verworfen, wenn k „zu klein oder groß“ ist, womit der kritische Bereich auf beiden Seiten liegt, deshalb der Ausdruck zweiseitiger Test. Dazu muss in der Tabelle mit den entsprechenden n und $p = p_0$ das größte k_o und das kleinste k_u abgelesen werden, für welche

$$P(X \leq k_o) \leq \alpha/2 \text{ und } P(X \geq k_u) \leq \alpha/2$$

gelten. Der kritische Bereich ist dann

$$K = \{0, 1, \dots, k_o\} \cup \{k_u, \dots, n\}.$$

Also muss entsprechend wie in den einseitigen Fällen (1 und 2) vorgegangen werden, nur mit dem halbem Wert von α . Da somit die Nullhypothese verworfen werden kann, wenn

$$2 \cdot P(X \leq k) \leq \alpha \text{ oder } 2 \cdot (1 - P(X \leq k - 1)) \leq \alpha$$

gilt, ist der zweiseitige p-Wert gegeben durch:

$$\text{p-Wert} = \min \{ 2 \cdot P(X \leq k), 2 \cdot (1 - P(X \leq k - 1)), 1 \}$$

In der obigen Menge ist auch die 1 enthalten, denn falls $k = E(X) = n \cdot p \in \mathbb{N}$ gilt, ist $P(X \leq k) > 0,5$ und $P(X \geq k) > 0,5$!

Es folgt der Output von Statistikpaket.de (zum ersten Beispiel).

Für $n = 100$ und $k = 14$ gilt:

	H0: $p = 0.2$ gegen H1: $p < 0.2$	H0: $p \geq 0.2$ gegen H1: $p < 0.2$	H0: $p \leq 0.2$ gegen H1: $p > 0.2$
p-Werte	0.1608874422761	0.080443721138051	0.95308776283921
kritische Bereiche für $\alpha = 5\%$	$K = \{0, \dots, 11\} \cup \{29, \dots, 100\}$	$K = \{0, \dots, 13\}$	$K = \{28, \dots, 100\}$
kritische Bereiche für $\alpha = 1\%$	$K = \{0, \dots, 9\} \cup \{32, \dots, 100\}$	$K = \{0, \dots, 10\}$	$K = \{31, \dots, 100\}$

Zur Berechnung des Beispiels mit Statistikpaket.de muss entweder (was Sie nicht tun sollten) die Stichprobe unter $v1$ komplett eingegeben werden, z.B. 14 mal „gewonnen“ und dann 86 mal „verloren“ und dann im Menü → **Univariate Statistik** → **Binomialtest** gewählt werden, womit das folgende Fenster erscheint:

Binomialtest

Beobachtung	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
gewonnen	14	0.14
verloren	86	0.86

H0: $p = p_0$	H0: $p \geq p_0$	H0: $p \leq p_0$
gegen	gegen	gegen
H1: $p < p_0$	H1: $p < p_0$	H1: $p > p_0$

n =	100
p0 =	0.5
k ("Anzahl Erfolge") =	14

Hier können Sie dann neben p_0 den hypothetischen Wert für p eingeben, d.h. im Beispiel 0,2 und dann →**berechnen** wählen.

Oder Sie können auch das Eingeben der kompletten Stichprobe umgehen (was hier natürlich zum empfehlen ist) und direkt in dieses Menü wechseln (über →**Univariate Statistik** →**Binomialtest**). Hier können auch unabhängig von einer zuvor eingegebenen (oder nicht eingegebenen) Stichprobe die Werte für n und k eingetragen werden (hier $n = 100$ und $k = 14$).

Bei dem Binomialtest und dem Chi-Quadrat-Test auf Unabhängigkeit ist es auch möglich, Texte für die Ausprägungen der Variablen einzugeben, d.h. nicht nur Zahlenwerte. Bei größeren Datenmengen sollte man hier aber eine Kodierung verwenden und generell auch keine Sätze für die einzelnen Ausprägungen eingeben, sondern nur

Wörter, Buchstaben oder Zahlen. In unserem Beispiel könnte man beispielsweise die Ausprägungen „gewonnen“ mit 0 und die Ausprägung „verloren“ mit 1 kodieren oder auch umgekehrt, wobei dann aber das System für k die absolute Häufigkeit für „verloren“ einträgt, da das System für k die erste absolute Häufigkeit in der nach Ausprägungen aufsteigend sortierten Häufigkeitstabelle nimmt.

Bemerkung: Für $n \geq 200$ und $np(1-p) > 9$ erscheinen im Output approximative p -Werte. Da

$$z = \frac{k - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{mit } p = p_0$$

(unter H_0) asymptotisch standardnormalverteilt ist, werden als (approximative) p -Werte $2(1-F_{N(0,1)}(|z|))$, $F_{N(0,1)}(z)$ und $1-F_{N(0,1)}(z)$ ausgegeben, wobei eine Stetigkeitskorrektur verwendet wird.

Umsetzung mit SAS:

```
data dat1;
input anzahl x;
datalines;
14 1
86 2
run;

proc freq data=dat1 order = data;
tables x / binomial(p = 0.2);
weight anzahl;
exact binomial;
run;
```

SAS-Output zur Prozedur FREQ:

Das SAS System

Die Prozedur FREQ

x	Häufigkeit	Prozent	Kumulative Häufigkeit	Kumulativer Prozentwert
1	14	14.00	14	14.00
2	86	86.00	100	100.00

Binomialverhältnis für x = 1

Verhältnis (P)	0.1400
ASE	0.0347
95% Untere Konf.grenze	0.0720
95% Obere Konf.grenze	0.2080

Exakte Konfidenzgrenzen

95% Untere Konf.grenze	0.0787
95% Obere Konf.grenze	0.2237

Test von H0: Verhältnis = 0.2

ASE unter H0	0.0400
Z	-1.5000
Einseitige Pr < Z	0.0668
Zweiseitige Pr > Z 	0.1336

Exakter Test

Einseitige Pr <= P	0.0804
------------------------------	--------

<p>Test von H0: Verhältnis = 0.2</p> <p>Zweiseitig = 2 * Einseitig 0.1609</p>

Stichprobengröße = 100