4.2 Der Wilcoxon Vorzeichenrangtest für zwei verbundene Stichproben

Zur Durchführung des Vorzeichenrangtests nach Wilcoxon müssen zwei verbundene Teilstichproben vorliegen. Die erste Teilstichprobe besteht aus Realisierungen von unabhängig und identisch stetig verteilter Zufallsvariablen X_1, X_2, …, X_n (mit Median(X_i) = Median_1) und analog besteht die zweite Teilstichprobe aus Realisierungen von unabhängig und identisch stetig verteilter Zufallsvariablen Y_1, Y_2, …, Y_n (mit Median(Y_i) = Median_2). Bei diesem Test wird die Differenz beider Teilstichproben (wie im Kapitel 3.1) gebildet und danach wird mit dieser Differenz der Werte der Wilcoxon Vorzeichenrangtest für eine Stichprobe mit folgenden Hypothesen durchgeführt:

H_0: Median = 0 (entspricht der Hypothese $\text{Median}_1 = \text{Median}_2$)
gegen
H_1: Median ≠ 0 (entspricht der Hypothese $\text{Median}_1 \neq \text{Median}_2$)

Es folgen die Daten im Beispiel:

v1	v2
4,6	-0,7
1,3	0,9
0,5	4,3
1,6	-1,6
-4,2	-4,1
2,1	-3
-3	-12
3,2	0,8
2,2	-0,9
-0,6	1,1
-0,3	1,9
0	-1,3
-2,1	3,2
1,2	-1,2
-0,2	1,5

Sie sehen in der zweiten Teilstichprobe eine Beobachtung mit dem Wert -12, die offensichtlich ein Ausreißer darstellt. Da bei der Berechnung der Prüfgröße nur der Rang dieser Beobachtung eingeht, beeinflusst der Wert des Ausreißers den Test nur indirekt.

Mit **→Vergleich zweier verbundener Teilstichproben →Vorzeichenrangtest – verbundene Teilstichproben** erhalten Sie den folgenden Output:

Vorzeichenrangtest für zwei verbundene Stichproben

H0: Median1 = Median2
gegen
H1: Median1 <> Median2

Hier ist u.a. die eingegebene Stichprobe zu sehen:

Stichprobe 1 (x_i)	Stichprobe 2 (y_i)	$d_i = x_i - y_i$	Rang($\|d_i\|$)
4.6	-0.7	5.3	13.5
1.3	0.9	0.4	2
0.5	4.3	-3.8	11
1.6	-1.6	3.2	10
-4.2	-4.1	-0.1	1
2.1	-3	5.1	12
-3.	-12	9	15
3.2	0.8	2.4	7.5
2.2	-0.9	3.1	9
-0.6	1.1	-1.7	4.5
-0.3	1.9	-2.2	6
0	-1.3	1.3	3
-2.1	3.2	-5.3	13.5
1.2	-1.2	2.4	7.5
-0.2	1.5	-1.7	4.5

Bemerkung: Bei der Berechnung der Rangzahlen werden nur Differenzen $(x_i - y_i) <> 0$ berücksichtigt!

Anzahl Werte $x_i - y_i <> 0$	15
Rangsumme für $d_i < 0$	40.5
t^+ bzw. Rangsumme für $d_i > 0$	79.5
$E(T^+)$	60
$Var(T^+)$	309.625
p-Wert (approximiert [(1)])	0.2678

[(1)] Approximierten p-Wert nur für n>20 beachten.

Bezeichnet man die Werte der Variablen v1 mit x_i und die der Variablen v2 mit y_i, dann wird hier zunächst die Differenzstichprobe $z_i = x_i - y_i$ gebildet und danach mit dieser der Vorzeichenrangtest von Wilcoxon für eine Stichprobe durchgeführt. Die Beschreibung für diesen finden Sie im Kapitel 1.7.

Wie zu sehen ist, könnte die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden, womit kein signifikanter Unterschied zwischen den Medianen der beiden Teilstichproben nachgewiesen werden könnte, wenn man den approximierten p-Wert verwenden würde.

Umsetzung mit SAS:

```
data dat1;
input x y;
datalines;
 4.6        -0.7
 1.3         0.9
 0.5         4.3
 1.6        -1.6
-4.2       - 4.1
 2.1        -3.0
-3.0       -12.0
 3.2         0.8
 2.2        -0.9
-0.6         1.1
-0.3         1.9
 0.0        -1.3
-2.1         3.2
 1.2        -1.2
-0.2         1.5
run;

data dat1;
set dat1;
diff=x-y;
run;

proc univariate data = dat1 normal;
var diff;
run;
```

SAS-Output zur Prozedur UNIVARIATE:

Die Prozedur UNIVARIATE
Variable: diff

Momente			
N	15	**Summe Gewichte**	15
Mittelwert	1.16	**Summe Beobacht.**	17.4
Std.abweichung	3.791871	**Varianz**	14.3782857
Schiefe	0.23408099	**Kurtosis**	-0.0697115
Unkorr. Qu.summe	221.48	**Korr. Quad.summe**	201.296
Variationskoeff.	326.885431	**Stdfeh. Mittelw.**	0.97905688

Grundlegende Statistikmaße			
Lage		**Streuung**	
Mittelwert	1.160000	**Std.abweichung**	3.79187
Median	1.300000	**Varianz**	14.37829
Modalwert	.	**Spannweite**	14.30000
		Interquartilsabstand	4.90000

Tests auf Lageparameter: Mu0=0				
Test	**Statistik**		**p-Wert**	
Studentsches t	**t**	1.184814	**Pr > |t|**	0.2558
Vorzeichen	**M**	1.5	**Pr >= |M|**	0.6072
Vorzeichen-Rang	**S**	19.5	**Pr >= |S|**	0.2829

Tests auf Normalverteilung				
Test	**Statistik**		**p-Wert**	
Shapiro-Wilk	**W**	0.983618	**Pr < W**	0.9883

Tests auf Normalverteilung				
Test	**Statistik**		**p-Wert**	
Kolmogorov-Smirnov	**D**	0.107982	**Pr > D**	>0.1500
Cramer-von Mises	**W-Sq**	0.021732	**Pr > W-Sq**	>0.2500
Anderson-Darling	**A-Sq**	0.152698	**Pr > A-Sq**	>0.2500

Quantile (Definition 5)	
Quantil	**Schätzwert**
100% Max	9.0
99%	9.0
95%	9.0
90%	5.3
75% Q3	3.2
50% Median	1.3
25% Q1	-1.7
10%	-3.8
5%	-5.3
1%	-5.3
0% Min	-5.3

Extreme Beobachtungen			
Kleinste		**Größte**	
Wert	**Beobachtung**	**Wert**	**Beobachtung**
-5.3	13	3.1	9
-3.8	3	3.2	4
-2.2	11	5.1	6

Extreme Beobachtungen			
Kleinste		Größte	
Wert	Beobachtung	Wert	Beobachtung
-1.7	10	5.3	1
-1.7	15	9.0	7