

3.2 Wilcoxon Rangsummentest

Wir gehen davon aus, dass zwei Teilstichproben x_1, x_2, \dots, x_{n_1} und y_1, y_2, \dots, y_{n_2} vorliegen, wobei die erste Teilstichprobe aus Realisierungen von unabhängig und identisch stetig verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_{n_1} mit der Verteilungsfunktion F_1 besteht und analog die zweite Teilstichprobe aus Realisierungen von unabhängig und identisch stetig verteilten Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} mit der Verteilungsfunktion F_2 . Die Zufallsvariablen beider Teilstichproben sollen auch unabhängig voneinander sein. Bei diesem Test genügt es, wenn das Datenniveau mindestens ordinal ist.

Es werden die folgenden Hypothesen getestet:

$$H_0: F_1(z) = F_2(z) \text{ für alle } z$$

gegen

$$H_1: F_1(z) \neq F_2(z) \text{ für mindestens ein } z$$

Wie verwenden die folgenden Daten im Beispiel:

v1	v2
25	19,3
31	16
20,1	14,5
23,5	13,5
18	

Nach der Dateneingabe können Sie den Button **→Vergleich zweier unverbundener Teilstichproben** anklicken, wobei Sie zuvor die beiden Variablen v1 und v2 unter diesem Menüpunkt auswählen müssen.

Danach können Sie →**Rangsummentest** - **unverbundene Teilstichproben** auswählen und erhalten den folgenden Output:

Rangsummentest für zwei unverbundene Stichproben

H0: Die beiden Verteilungsfunktionen sind identisch
 gegen
 H1: Die beiden Verteilungsfunktionen sind nicht identisch

Hier ist u.a. die eingegebene Stichprobe zu sehen:

Stichprobe 1 (x_i)	Rang(x_i)	Stichprobe 2 (y_i)	Rang(y_i)
25	8	19.3	5
31	9	16	3
20.1	6	14.5	2
23.5	7	13.5	1
18	4		

Umfang 1. Teilstichprobe (m)	5
Umfang 2. Teilstichprobe (n)	4
Summe der Teilstichprobenumfänge (n+m)	9
Rangsumme erste Teilstichprobe (w)	34
Rangsumme zweite Teilstichprobe	11
E(W)	25
Var(W)	16.6666666666667
p-Wert (approximiert ⁽¹⁾)	0.0275

⁽¹⁾ Approximierten p-Wert für $m+n > 25$.

Bei diesem Test werden die Ränge für beide Teilstichproben zusammen vergeben, d.h. man vergibt die Ränge wie für eine große Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$. Die Rangzahlen sind auch in der obigen Tabelle zu sehen.

Man nimmt dann die Rangsumme der ersten Teilstichprobe als Prüfgröße:

$$w = \sum_{i=1}^{n_1} \text{Rang}(x_i)$$

Im Beispiel ist $w = 34$. Hieraus kann auch die Rangsumme der zweiten Stichprobe berechnet werden, denn es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \text{Rang}(x_i) + \sum_{i=1}^{n_2} \text{Rang}(y_i) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$E(W) = n_1(n+1)/2$$

$$\text{Var}(W) = \frac{n_1 n_2}{12} \left(n+1 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^k t_j (t_j - 1)(t_j + 1) \right)$$

Falls keine Bindungen vorkommen, wie in unserem Beispiel, dann gilt:

$$\sum_{j=1}^k t_j (t_j - 1)(t_j + 1) = 0$$

Die Liste der t_j (mit $j = 1, 2, \dots, k$) enthält im Beispiel nur Einsen, denn es kommen keine Werte mehrfach vor bzw. es sind keine Bindungen vorhanden. Die Werte t_j sind die absoluten Häufigkeiten der Werte der großen Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ (siehe Kapitel 1.5).

Im Beispiel ist $E(W) = 25$ und $\text{Var}(W) = 16,6$.

Es wird ein approximativer p-Wert ausgegeben, da

$$z = \frac{k - E(W)}{\sqrt{\text{Var}(W)}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt ist:

$$\text{p-Wert} = 2(1 - F_{N(0,1)}(|z|))$$

Hier sollte $n_1 + n_2 > 25$ sein. Im Beispiel ist p-Wert $\approx 0,0275$. In Büchern wie z.B. in [3], [8] und [9] findet man Tabellen der exakten Verteilung für den Fall, das keine Bindungen vorliegen.

Bei der Bestimmung der exakten Verteilung müsste man alle n_1 -elementigen Teilmengen aus der Menge der Rangzahlen

$$\{\text{Rang}(x_1), \text{Rang}(x_2), \dots, \text{Rang}(x_{n_1}), \text{Rang}(y_1), \text{Rang}(y_2), \dots, \text{Rang}(y_{n_2})\}$$

ziehen und die Summe über die Elemente dieser Teilmengen bilden. Die relativen Häufigkeiten der Summanden sind gleich die exakten Wahrscheinlichkeiten. Der kleinste Werte, den w annehmen kann, der würde sich ergeben, wenn nur die Zahlen von 1 bis n_1 Rangzahlen der ersten Stichprobe wären. In diesem Falls wäre $w = 1 + 2 + \dots + n_1 = n_1(n_1 + 1)/2 = 15$. Den größten Wert für w ergibt sich, wenn in die erste Stichprobe die Rangzahlen von 1 bis n_2 fallen: $w = (n_2 + 1) + (n_2 + 2) + \dots + n = n(n + 1)/2 - n_2(n_2 + 1)/2 = 35$. Es folgt die Tabelle der exakten Verteilung von W in unserem Beispiel:

w	P(W = w)	P(W ≤ w)
15	0,0079365	0,0079365
16	0,0079365	0,0158730
17	0,0158730	0,0317460
18	0,0238095	0,0555556

w	P(W = w)	P(W ≤ w)
19	0,0396825	0,0952381
20	0,0476190	0,1428571
21	0,0634921	0,2063492
22	0,0714286	0,2777778
23	0,0873016	0,3650794
24	0,0873016	0,4523810
25	0,0952381	0,5476190
26	0,0873016	0,6349206
27	0,0873016	0,7222222
28	0,0714286	0,7936508
29	0,0634921	0,8571429
30	0,0476191	0,9047619
31	0,0396825	0,9444444
32	0,0238095	0,9682540
33	0,0158730	0,9841270
34	0,0079365	0,9920635
35	0,0079365	1

Der exakte p-Wert im Beispiel ergibt sich dann wie beim Binomialtest:

$$\text{p-Wert} = \min \{2 \cdot P(W \leq 34), 2 \cdot P(W \geq 34), 1\}$$

Es gilt:

$$P(W \leq 34) = 0,99263\dots$$

$$P(W \geq 34) = 1 - P(W \leq 33) = 1 - 0,984127\dots = 0,01587\dots$$

Also gilt: $\text{p-Wert} = 2 \cdot P(W \geq 34) \approx 0,0317$. Somit könnte die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden, womit es einen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Verteilungen F_1 und F_2 gibt.

Umsetzung mit SAS:

```

data dat1;
input x y;
datalines;
1 25
1 31
1 20.1
1 23.5
1 18
2 19.3
2 16
2 14.5
2 13.5
run;

proc npar1way data = dat1 wilcoxon;
class x;
var y;
run;

```

SAS-Output zur Prozedur NPAR1WAY:

Die Prozedur NPAR1WAY

Wilcoxon-Scorewerte (Rangsummen) für Variable y Klassifiziert nach Variable x					
x	N	Summe der Scorewerte	Erwartet unter H0	Std.abw. unter H0	Mittelwert- Score
1	5	34.0	25.0	4.082483	6.800
2	4	11.0	20.0	4.082483	2.750

Wilcoxon Zwei-Stichprobentest	
Statistik	11.0000
Normale Approximation	

Wilcoxon Zwei-Stichprobentest	
Z	-2.0821
Einseitige Pr < Z	0.0187
Zweiseitige Pr > Z 	0.0373
t-Approximation	
Einseitige Pr < Z	0.0354
Zweiseitige Pr > Z 	0.0709
Z enthält Kontinuitätskorrektur von 0,5.	

Kruskal-Wallis-Test	
Chi-Quadrat	4.8600
DF	1
Pr > Chi-Quadrat	0.0275